(§7.2 Formes quadratiques) Cours 14.1

17.12.24

Rappel 7.2.7

Pour $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, symétrique ($A = A^T$)
on a défini une forme quadratique

$$q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^T A x$$

et $\cdot_A \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x^T A y$$

qui est une forme bilinéaire symétrique
càd satisfait les propriétés 1) 2) 3) de 

(càd "presque" un produit scalaire) (manquent 4) & 5))

et on a vu (Thm 7.2.4) qu'il existe P orthogonale
et D diagonale ($\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$) telles que

$$q_A(x) = q_D(y) \quad \text{où} \quad x = Py \quad (y = P^T x)$$

On dit que q_D est ~~la~~ une forme diagonale de q_A

On a $q_D(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ où $\lambda_i \in \mathrm{Spc}(A)$

et les colonnes (unitaires) de P sont appelées les
axes principaux de A

NPO:
- évaluez ce cours < 12 Q.1
- séance RaQ 17 janvier 14h → 16h
- consultations examens 13.02.2025 & juillet 25

§7.3 : Classification des formes quadratiques (réelles)

Déf 7.3.1 : $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tq $A = A^T$

et soit $q_A(x) = x^T A x$. $x \in \mathbb{R}^n$

On dit que q_A (ou A) est

1) <u>définie positive</u> si $q_A(x) > 0$ $\forall x \neq 0$
2) <u>définie négative</u> si $q_A(x) < 0$ $\forall x \neq 0$
3) <u>non définie</u> s'il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ tq $q_A(x) > 0$ et $q_A(y) < 0$
4) <u>positive</u> si $q_A(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
5) <u>négative</u> si $q_A(x) \leq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$
6) <u>isotrope</u> si $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ t.q $q_A(x) = 0$
   (un tel x s'appelle vecteur <u>isotrope</u>)
   même latitude.
7) <u>non dégénérée</u> si $x^T A y = 0 \ \forall y$ implique $x = 0$.

Ex: 7.3.2 :

$q_A(x) = z \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$n = 2$

$z \in \mathbb{R}$

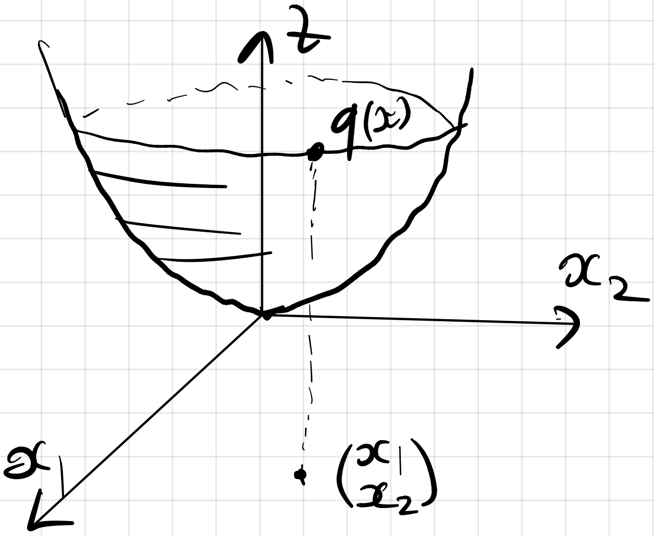
donne une fonction

1)

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$q_A(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 7x_2^2 = z \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto q_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

ellipse si $z > 0$



les sections horizontales

i.e intersection

avec plan

$z = c$

ellipses si $c > 0$

1 point $c = 0$ $(0,0)$

$\emptyset$ $c < 0$

q_A est

définie

positive

car

$3x_1^2 + 7x_2^2 \geq 0$

avec $= 0$

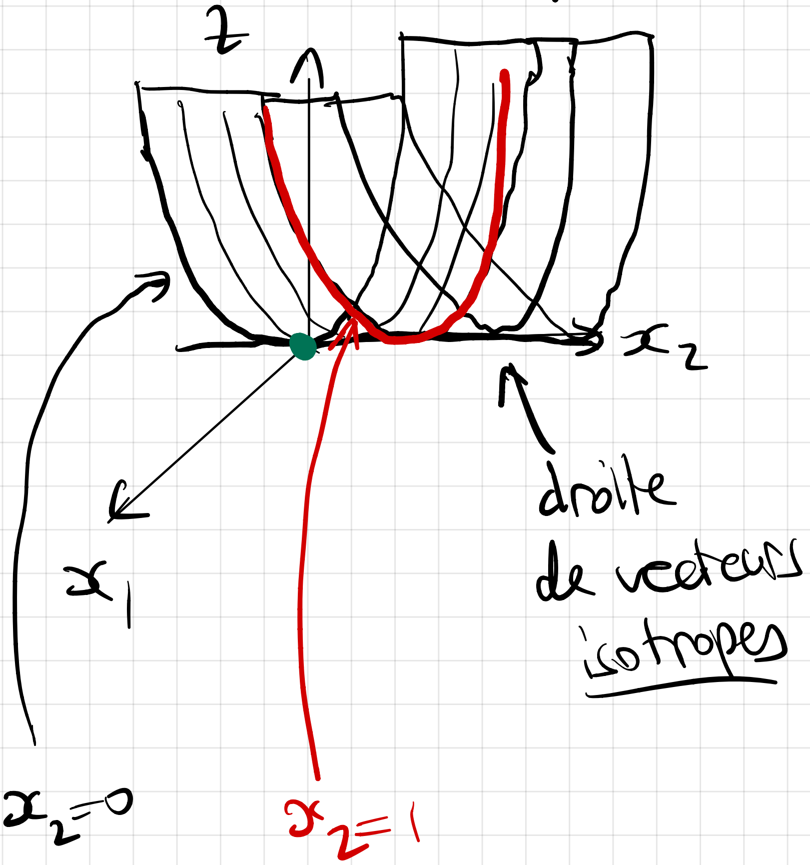
seulement si $(x_1, x_2) = (0,0)$

et non-dégénérée

et $-q_A$ définie négative

2) $\underline{n=2}$: $\quad q_A(x_1,x_2) = 3x_1^2 \;(+\,0\cdot x_2^2)$

⚠ forme quad à 2 variables



q_A est <u>positive</u>

mais n'est pas définie positive :

dès que $x_1=0$ on aura

$q_A(0,x_2)=0 \;\; \forall x_2$

p.ex $q_A(0,1)=0$

<u>dégénérée</u>

0 est valeur propre de A

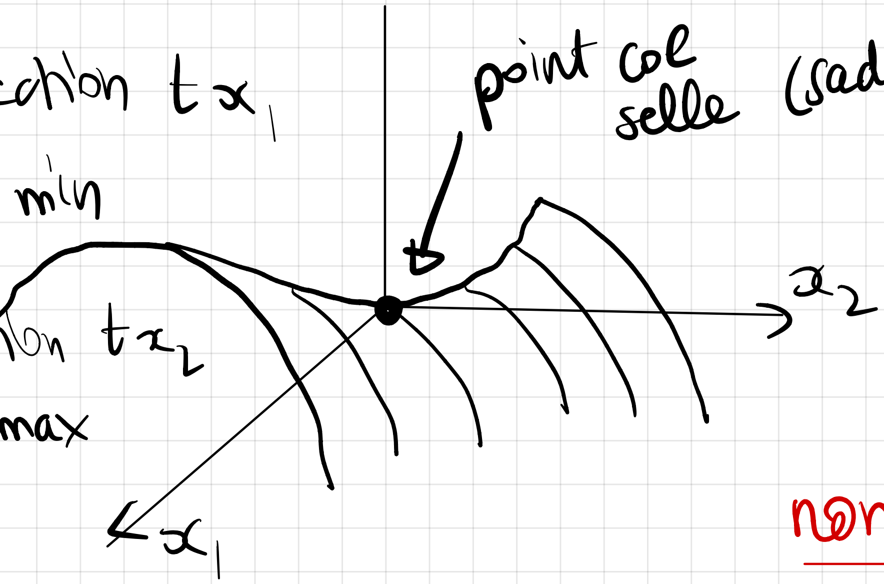
3) $3x_1^2 - 7x_2^2 = q_B(x_1,x_2)$

selon la direction tx_1

(0,0) est un min

selon la direction tx_2

(0,0) est un max



forme quadratique <u>indéfinie</u>

<u>non dégénérée</u>

Thm 7.3.3 : (formes quadratiques & valeurs propres)

Soit $A = A^T \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

et $q_A(x) = x^T A x$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$, alors

1) A est définie positive $\Leftrightarrow$ $Spc(A) \subset \mathbb{R}^*_+$

(les valeurs propres de A sont strict. positives)

2) A " " négative $\Leftrightarrow$ $Spc(A) \subset \mathbb{R}^*_-$

3) A n'est pas définie $\Leftrightarrow$ A possède des valeurs propres de signes opposés.

$\Updownarrow$

q_A est isotrope

4) A non dégénérée $\Leftrightarrow$ A inversible
$\Leftrightarrow 0 \notin Spc(A)$

demo: l'idée est de diagonaliser q_A

$\rightsquigarrow$ $q_D(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

$x = Py$ (P orthogonale)

si $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

alors $q_D(y) > 0$. (cqfd)

Cor 7.3.4 :

Si A est définie positive, alors la fonction

$x^T A y = x \cdot_A y$ est un produit scalaire.

exemple 7.3.5 : $n=3$ $\quad q_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$q_A(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

est-elle déf. positive ?
quelle est ~~la~~ une forme diagonale de q_A ?

Trouver A : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

exo
$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Spc}(A) = \{-1, 2, 5\}$ non définie (non dégénérée) malgré les apparences.

§ 7.4. Optimisation sous-contrainte "simple"

Problème 7.4.1 : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction et $C \subseteq \mathbb{R}^n$ sous-ensemble.

on cherche, si possible,

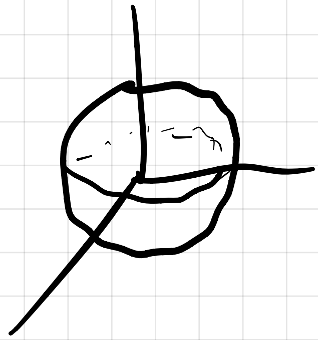
$$M = \max_{c \in C} \{f(c)\} \qquad m = \min_{c \in C} \{f(c)\}$$

c'est ce qu'on appelle une <u>optimisation sous contrainte</u> (C étant la contrainte).

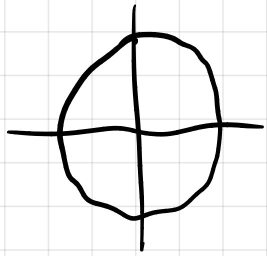
<u>Exemple</u> : $$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$$

← l'hypersphère unité

$n=3$



$n=2$



<u>Rem. 7.4.2</u> : Si $A = A^T$, alors

$$I = \{q_A(x) \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}$$

est un intervalle borné et

$$M = \max\{x^T A x \mid \|x\| = 1\}$$

$$m = \min\{x^T A x \mid \|x\| = 1\}$$

$$I = [m, M]$$

Thm 7.4.3 : Soit $A = A^T$, q_A, M, m comme ↺ alors

1) M est égale à la plus grande val. propre de A appelons-la λ_{max}, et ce maximum est atteint en tout vecteur propre unitaire x_{max} associé à λ_{max} (i.e $\|x_{max}\| = 1$)

2) m est égal à la plus petite val. propre de A : λ_{min}
Ce minimum est atteint en x_{min} qui est un vecteur propre unitaire associé à λ_{min}.

$$q_A(x_{max}) = \lambda_{max} \qquad q_A(x_{min}) = \lambda_{min}$$

ex 7.4.4

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow c_A(t) = -(t-6)(t-3)(t-1)$$

6 val. propre $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vect. propre

$M = 6$ atteint en $\pm \frac{v}{\|v\|} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$m = 1$ atteint en $\pm\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$

idée de démo du Thm 7.4.3 :

diagonaliser q_A en base orthonormée.

(+ dualité en Analyse 2)

Morale : le comportement de q_A sur $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ se lit sur $Spc(A)$.

$(A = A^T)$.

§ 7.5 Décomposition en valeurs singulières (SVD = singular value decomp.)

- Si A carrée et si "tout va bien"

  on peut diagonaliser A

  $\exists P$ inversible t.q. $A = PDP^{-1}$

  D diagonale $\quad (A = Q^{-1}DQ \,,\ Q = P^{-1})$

(si A est sym., alors on peut prendre P orthogonale c.à.d $P^{-1} = P^{T}$)

Problèmes :

- il y a des matrices carrées non diagonalisable
- il y a des matrices non carrées ...

<u>Astuce 7.5.1</u> : Pour $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1) la matrice $A^{T}A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

   est symétrique (exercice)

   et donc orthogonalement diagonalisable

2) On a vu qe si $B = B^T$ $(B \in M_{n \times n})$
alors les val. propre de B
mesurent comment B déforme
certains vecteurs (ici les vecteurs propres)

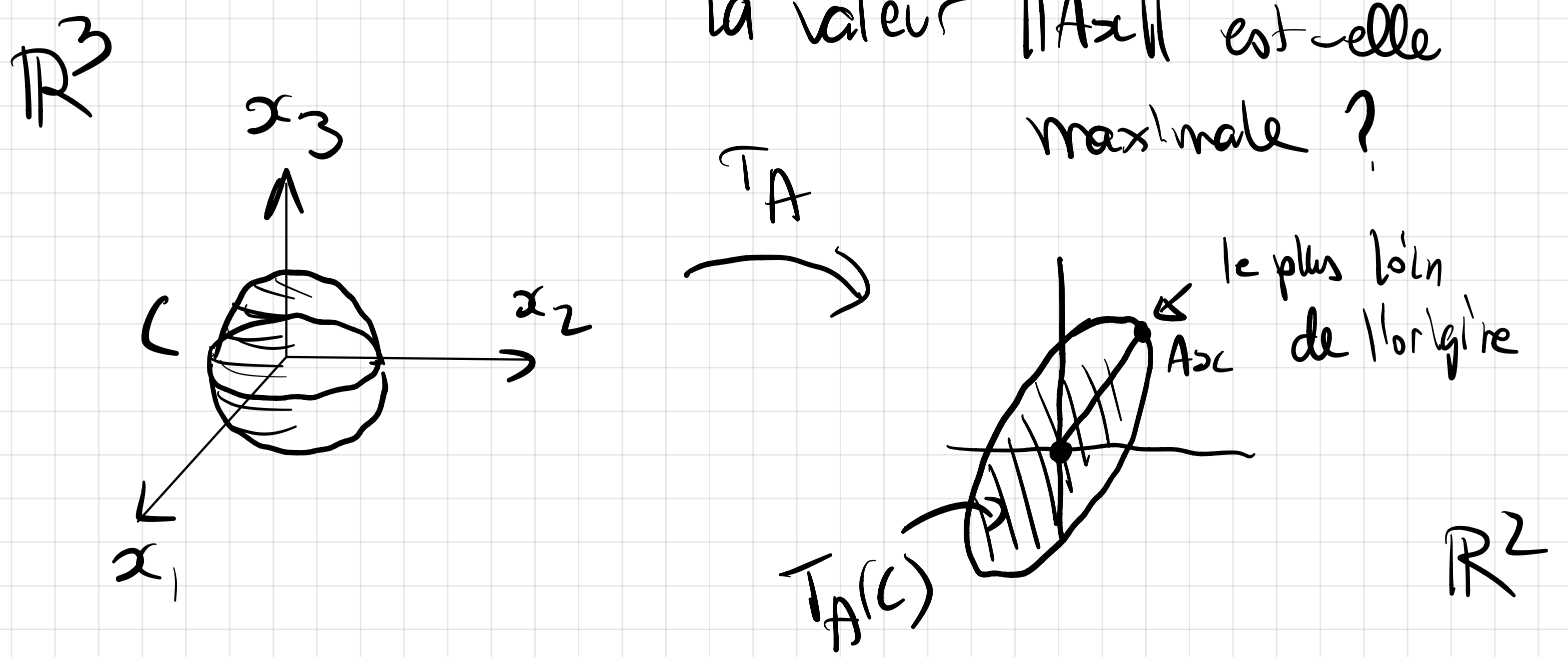
si $Bx = \lambda x$ et si $\|x\| = 1$

alors $\|Bx\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda|$

Ex 7.5.2 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$x \mapsto Ax$

question : Pour quel(s) $x \in \mathbb{R}^3$ (tq $\|x\| = 1$)
la valeur $\|Ax\|$ est-elle maximale ?



Rem 7.5.3 :

Maximiser $\|Ax\|$ (≥ 0)
equivaut à maximiser $\|Ax\|^2$
or nous avons

$$0 \leq \|Ax\|^2 = Ax \cdot Ax = (Ax)^T Ax$$
$$= x^T (A^T A) x$$

Donc $\begin{cases} A^T A \text{ est positive } (\Leftrightarrow \operatorname{Spec}(A^T A) \subset \mathbb{R}_+) \\ \\ \text{maximiser } \|Ax\| \text{ sous la contrainte } \|x\|=1 \end{cases}$

équivaut à maximiser
la forme quadr. $q_{A^T A}$

Ex 7.5.2 (suite)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$$

calculs

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Spc}(A^TA) = \{\underbrace{360}_{\lambda_1}, \underbrace{90}_{\lambda_2}, \underbrace{0}_{\lambda_3}\}$

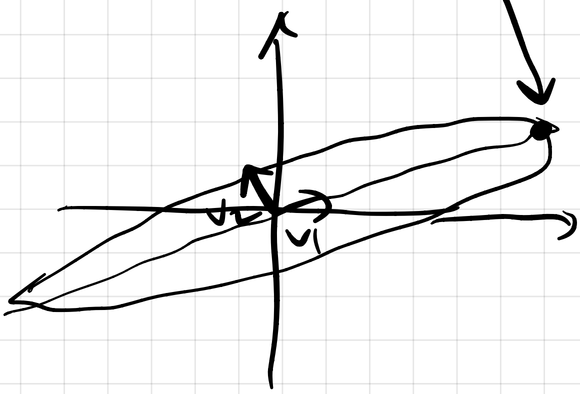
$$360 = \max\{\|Ax\|^2 \mid \|x\| = 1\}$$

$$\sqrt{360} = 6\sqrt{10} = \max\{\|Ax\| \mid \|x\|=1\} = \sqrt{\lambda_1}$$

atteint en $x = v_1$ = vecteur propre unitaire associé à λ_1

calculons

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$Av_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\|Av_2\| = \sqrt{\lambda_2} = 3\sqrt{10}$$

Rem 7.5.4 : Cet exemple suggère que l'effet de $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ sur la "sphère" unité C est visible sur la forme quadr. q_{A^TA}

Déf 7.5.5 (Décompositions en valeurs singulières d'une matrice $m \times n$)